Codage de systèmes dynamiques particuliers.

Nicolas Bédaride

Université Aix Marseille

Publicité

Publicité

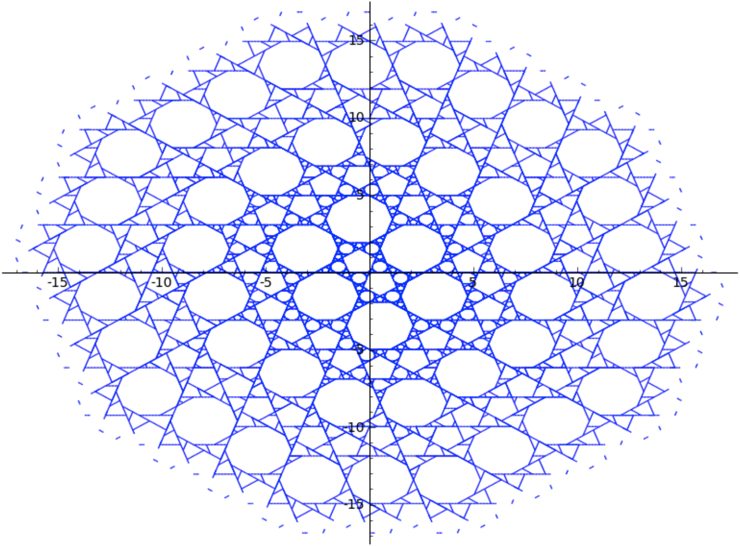
Chaire Morlet CIRM: Juillet- décembre 2023.

Ecole en juillet: 3 cours: Un sur le billard, un sur la dynamique, un sur la théorie des nombres.

Groupe de travail en septembre: Utiliser Sage pour la recherche

Groupe de travail: Novembre 2023

Conférence: décembre 2023.


15
10
5
-5
-10
-15
-15
-10
-5
5
10
15

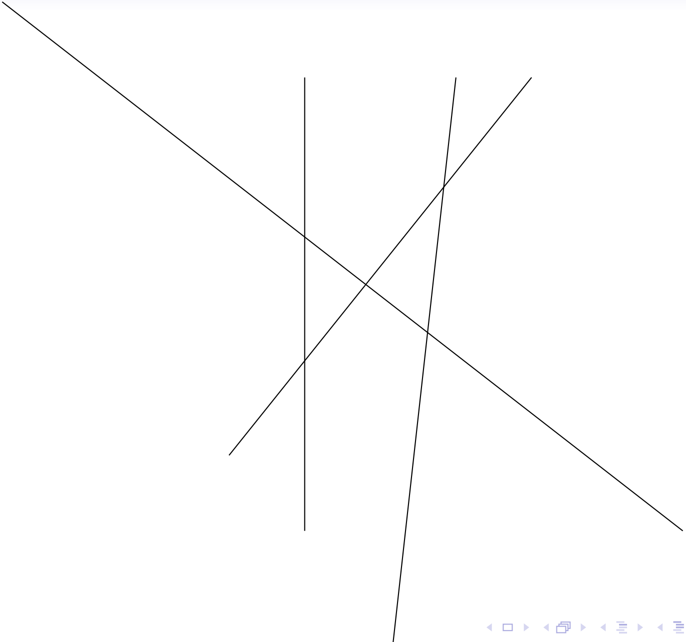
Définitions

Considérons un nombre fini d'hyperplans de $\mathbb{R}^d$, $H_1 \dots H_k$. Soit $X = \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i \leq k} H_i$. Une **isométrie partielle** de $\mathbb{R}^d$ est une application T:

Définitions

Considérons un nombre fini d'hyperplans de $\mathbb{R}^d$, $H_1 \ldots H_k$. Soit $X = \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i \leq k} H_i$. Une **isométrie partielle** de $\mathbb{R}^d$ est une application T:

- définie sur X,
- la restriction de T à un ensemble connexe est une isométrie de $\mathbb{R}^d$,
- l'application est bijective (pas nécessaire).



Lemme

L'orbite d'un point m est définie pour presque tout point $m \in X$.

Théorème (Buzzi)

L'entropie topologique est nulle.

Définition adaptée au cas non compact, cf papier.

Codage: bon ou mauvais.

Sous-shift.

Un **codage** de l'application consiste à associer une lettre à chaque isométrie définissant T. On définit alors ϕ:

$$\phi : X \mapsto \{1 \ldots l\}^{\mathbb{N}}$$

$$\phi(m) = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

u_n est le nom de l'isométrie définie sur un voisinage de $T^n m$. Définissons $\Sigma = \overline{\phi(X)}$, pour la topologie produit.

L'ensemble Σ est l'ensemble de tous les mots infinis codage de trajectoire. Un mot de longueur n inclus dans une suite de Σ est un mot du langage de l'application.
La **cellule** d'un mot v est

$$\sigma_v = \{m \in X, Tm \in P_{v_i} \quad \forall i \in [0 \ldots |v|]\}$$

On peut aussi définir la cellule d'un mot infini.

Mots et dessins

$$(\Sigma, S)$$

$$(X, T)$$

Mot v	Cellule
Mot fini	Polygone
Mot périodique	Polygone, disque
Mot non périodique	Fractale
Substitution	Ensemble auto-similaire

Complexité:

- $p(n, m)$: complexité du mot infini codant une orbite
- $p(n)$: complexité du langage total.
- Complexité globable ? tous les paramètres,cf iet. Sens ?

Estimation ?

Dimension un

Échange d'intervalles.
$p(n, m)$ sous linéaire. Borne de Vincent Delecroix polynomiale pour complexité globale tous iet.

Translations d'intervalles ?

Billard

Dimension deux.
P. Hubert pour $p(n, m)$ billard rationnel: fonction affine.
Complexité globale: Cassaigne-Hubert-Troubetzkoy, Boshernitzan, $p(n) \approx n^3$.

Moi pour l'hypercube de dimension $d \geq 3 \ldots$

Caractérisation du langage ?

Divers exemples. Goetz, Ashwin,

Tout est basé sur l'induction. On peut en déduire la complexité.

Billard dual

Plein de résultats sur la dynamique.

Très peu sur la complexité.

Rotations par morceaux

Famille introduite par Boshernitzan-Goetz. La plus étudiée actuellement. Famille à deux paramètres.

Travaux avec I. Kaboré

Translations du tore

Lien billard cube.

Fractals de Rauzy. cf travaux Pythéas.

- Classification
- Borne sur la complexité
- Isométrie sans point fixe
- Isométrie avec point orbite dense ?
- Isométrie avec orbite non bornée ?
- Paramètre non quadratique ?

Translations par morceaux dans le plan.

Un exemple avec orbites bornées de complexité $n^2 \log(n)$.

Un exemple avec orbites non bornées de complexité n^3.

Autre possibilité ?